

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

CLARA RODRIGUES VIDOR

**Caracterização de processos não-Markovianos em
dinâmicas quânticas**

São Carlos

2021

CLARA RODRIGUES VIDOR

**Caracterização de processos não-Markovianos em
dinâmicas quânticas**

Trabalho de conclusão de curso apresentado
ao Programa de Graduação em Física do Insti-
tuto de Física de São Carlos da Universidade
de São Paulo, para obtenção do título de Ba-
charel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Borges de
Brito

**São Carlos
2021**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Vidor, Clara Rodrigues

Caracterização de processos não-Markovianos em dinâmicas quânticas / Clara Rodrigues Vidor; orientador Frederico Brito -- São Carlos, 2021.

29 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Física) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Sistemas quânticos abertos. 2. Processos Markovianos quânticos. 3. Refluxo de informação quântica. I. Brito, Frederico, orient. II. Título.

RESUMO

Neste trabalho, buscamos entender as características de dinâmicas quânticas markovianas de acordo com duas definições distintas. Apresentamos, inicialmente, o formalismo de sistemas quânticos abertos e diferentes propriedades das dinâmicas não unitárias. A seguir, comentamos a respeito da definição de markovianidade clássica, que precisa ser reformulada para dinâmicas quânticas. Passamos, então, ao estudo das duas principais propostas (BLP e RHP) que disputam o consenso da definição de markovianidade quântica. Reproduzindo os resultados de (1), estudamos a evolução de um sistema específico, a partir do qual discutimos a validade de extensões das definições BLP e RHP para dinâmicas não lineares.

Palavras-chave: Sistemas quânticos abertos. Processos Markovianos quânticos. Refluxo de informação quântica.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	SISTEMAS FECHADOS	9
2.1	Operador densidade	9
3	SISTEMAS ABERTOS	11
3.1	Descrição geral de um sistema aberto	11
3.2	Mapas dinâmicos	12
3.2.1	Mapa a partir da dinâmica do sistema total	13
3.2.2	Mapas não unitários	14
3.2.3	Mapa dependente do estado de ρ_S	15
3.2.4	Composição	15
3.2.5	Gerador	16
3.2.6	Equação mestra	16
3.2.7	Contratilidade	17
4	MARKOVIANIDADE	19
4.1	Markovianidade clássica	19
4.2	Markovianidade quântica	19
4.2.1	Critério RHP	20
4.2.2	Critério BLP	21
4.2.3	Caso particular e possíveis extensões	22
5	CONCLUSÃO	27
	REFERÊNCIAS	29

1 INTRODUÇÃO

O processo de entendimento da descrição matemática da mecânica quântica geralmente começa pela equação de Schrödinger. Porém, por assumir evoluções unitárias, esse formalismo não trata de interações com ambientes quânticos. Como não é possível isolar completamente um sistema quântico do seu ambiente, apenas uma descrição mais geral é capaz de prever de maneira realista as evoluções quânticas. Além disso, o comportamento de propriedades como a coerência quântica - indispensável para a eficiência de tecnologias quânticas - depende fortemente da interação com o ambiente. Por isso, é essencial entender profundamente as particularidades das evoluções de sistemas abertos. Dentre os aspectos que classificam essas dinâmicas, está a markovianidade, ligada ao fluxo de informação no sistema e à preservação de características quânticas. O entendimento da markovianidade quântica facilita a procura por soluções que evitam efeitos indesejados do ambiente no sistema, ou que provocam os efeitos desejados. (1)

No contexto clássico, a definição de markovianidade é clara e única (2), pensada a partir das probabilidades condicionais. Mas essa definição não pode ser imediatamente estendida para o contexto quântico, já que características como emaranhamento e superposição impedem que tratemos as probabilidades condicionais da mesma forma. Surgem, então, diversas propostas de definições de markovianidade quântica baseadas nas propriedades matemáticas e na perda de memória. Como a maior parte das propostas não é equivalente entre si, existe uma disputa em relação a qual deve ser a mais apropriada. Nesse cenário, lideram as definições RHP (3) e BLP (4), ambas propostas para dinâmicas lineares.

Nosso trabalho busca entender as propostas de markovianidade quântica e testar extensões do regime de validade para dinâmicas não lineares (mais gerais) através de um estudo de caso. O texto é dividido em três grandes seções. Na seção 2, retomamos brevemente o formalismo para sistemas quânticos fechados. Em 3, introduzimos o formalismo de sistemas quânticos abertos e comentamos sobre as principais características que se conectam com as classificações de markovianidade. Por último, em 4, apresentamos a definição de markovianidade clássica, discutimos as duas principais definições quânticas e estudamos critérios para classificar uma dinâmica não linear. Os efeitos observados nesse contexto mais geral permitem argumentar em favor de uma ou outra definição.

2 SISTEMAS FECHADOS

Começamos retomando a descrição de sistemas fechados, já bastante conhecida, para que possamos salientar suas diferenças e semelhanças com a dinâmica de sistemas abertos. Em primeiro lugar, escrevemos a equação de Schrödinger

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H(t)|\psi(t)\rangle \quad (2.1)$$

onde consideramos a constante de Planck, \hbar , igual a 1. O vetor $|\psi(t)\rangle$ contém a informação do estado do sistema em um tempo t e $H(t)$ é a hamiltoniana, que perde a dependência temporal se o sistema for isolado, além de fechado. Podemos introduzir o operador de evolução temporal $U(t, t_0)$ que mapeia o estado em um instante t_0 ao estado no instante t . Esse operador deve ser unitário a fim de preservar a norma a cada instante. Se substituirmos $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$ em (2.1), encontramos a equação de Schrödinger para o operador de evolução temporal.

$$i \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H(t)U(t, t_0) \quad (2.2)$$

Temos, então, a solução mais geral para $U(t, t_0)$:

$$U(t, t_0) = T_{\leftarrow} \exp \left[-i \int_{t_0}^t H(s) ds \right], \quad (2.3)$$

sendo T_{\leftarrow} o operador de ordenamento temporal. Para sistemas em que a hamiltoniana é independente do tempo, a solução resume-se a $U(t, t_0) = \exp[-iH(t - t_0)]$.

2.1 Operador densidade

Ainda em sistemas isolados e fechados, o formalismo do operador densidade permite escrever as equações de movimento para casos mais gerais: os de estados mistos. Se trabalhamos apenas com kets (estados puros), tudo o que prevemos servirá somente para um conjunto de sistemas preparados de forma idêntica, cujo estado inicial corresponde ao ket com o qual trabalhamos. No entanto, podemos estar interessados na evolução de sistemas cujo estado não é completamente conhecido, mas podemos atribuir probabilidades para diferentes estados; ou simplesmente desejamos estudar um conjunto de sistemas que não foram preparados de forma idêntica. A descrição de ensembles com essas características não pode ser feita por um único estado puro - nem mesmo considerando estados de superposição - e se mostra necessária a adoção do operador densidade.

Chamaremos por $\rho(t)$ o operador densidade num instante t . Consideramos que os $|\psi_\alpha(t)\rangle$ são estados normalizados e ω_α são pesos positivos que correspondem à fração

do estado $|\psi_\alpha(t)\rangle$ no conjunto de todos os estados que formam o ensemble. O operador densidade correspondente a esse ensemble é dado por

$$\rho(t) = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} |\psi_{\alpha}(t)\rangle \langle \psi_{\alpha}(t)|, \quad (2.4)$$

onde $\sum_{\alpha} \omega_{\alpha} = 1$. Claramente os operadores densidade também são capazes de descrever sistemas com estados bem definidos, caso em que teremos um ensemble puro. Nessas situações, o operador densidade é dado apenas por $\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$, onde $|\psi(t)\rangle$ representa o estado do sistema. Para identificar se o ensemble que forma o operador densidade é puro ou misto, introduzimos a medida de pureza, dada por $tr(\rho^2)$. A pureza sempre será menor ou igual a um para qualquer ensemble, satisfazendo a igualdade se o ensemble for puro.

Reescrevendo os vetores de estado na equação (2.4) usando o operador de evolução temporal, somos capazes de encontrar a equação de movimento para $\rho(t)$, a equação de Lioville- von Neumann.

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H(t), \rho(t)] = \mathcal{L}(t)\rho(t) \quad (2.5)$$

O superoperador de Lioville, \mathcal{L} , atuando em $\rho(t)$ é definido como o comutador de $H(t)$ e $\rho(t)$ multiplicado por $-i$. Quando a hamiltoniana independe de t, \mathcal{L} também não dependerá e a solução da equação (2.5) será uma exponencial de \mathcal{L} multiplicada por t.

3 SISTEMAS ABERTOS

Tendo o conhecimento da dinâmica de sistemas fechados, podemos buscar a descrição de sistemas que interagem com um ambiente também quântico, com o qual podem criar correlações. O foco do nosso estudo será a dinâmica do sistema aberto, enquanto a evolução do ambiente não será do nosso interesse. Um sistema com essas características evoluirá de acordo com as interações entre seus componentes - como no caso de sistemas fechados - e também de acordo com as interações com ambiente que o cerca. As correlações entre o sistema e o ambiente fazem com que a evolução não seja mais unitária, então precisamos de uma descrição mais geral que a equação de Schrödinger. Nesta seção e nas próximas, trabalharemos com a derivação da dinâmica de sistemas abertos, inicialmente de forma mais geral e depois analisando casos mais particulares, como o de dinâmicas markovianas.

3.1 Descrição geral de um sistema aberto

Será útil considerar que conhecemos o sistema total para, a partir disso, derivarmos as características que emergem da descrição de apenas parte do sistema, as características de sistemas abertos. Ao nos referirmos a um sistema aberto, utilizaremos a seguinte notação: chamaremos pelo índice S o sistema aberto e por B o ambiente com o qual interage. Chamaremos por \mathcal{H}_S o espaço de Hilbert do sistema S e por \mathcal{H}_B o espaço de Hilbert do ambiente B . O espaço de Hilbert do sistema total é dado pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert individuais $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$. O estado mais geral do sistema composto é dado por um operador densidade no espaço $\mathbf{L}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B)$ dos operadores lineares que atuam em $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$, e pode ser escrito como uma combinação de elementos de $\mathbf{L}(\mathcal{H}_S)$ e $\mathbf{L}(\mathcal{H}_B)$ da forma $\rho = \sum_{i,j} \rho_i^S \otimes \rho_j^B$.

Sendo A_S e A_B operadores que atuam no sistema e no ambiente, respectivamente, o produto $A_S \otimes A_B$ é definido de forma que $(A_S \otimes A_B)(\rho_i^S \otimes \rho_j^B) = (A_S \rho_i^S) \otimes (A_B \rho_j^B)$. Portanto, operadores que atuam apenas no espaço do sistema de interesse têm a forma $A_S \otimes I_B$.

Para qualquer operador densidade do sistema total, o valor esperado de um observável $A = A_S \otimes I_B$ do sistema composto que atua só em S é obtido através de

$$\langle A \rangle = \text{tr}_S\{A_S \rho_S\}, \quad \rho_S \equiv \text{tr}_B\{\rho\}, \quad (3.1)$$

onde tr_B é o traço nos graus de liberdade do banho. O operador ρ_S obtido pela definição acima garante que $\text{tr}_S\{A_S \rho_S\} = \text{tr}\{(A_S \otimes I_B)\rho\}$. Quando o sistema e o ambiente não possuem correlações, o operador densidade do sistema total iguala-se ao produto tensorial

dos operadores densidade de cada um dos seus componentes, adquirindo a forma de estado produto $\rho = \rho_S \otimes \rho_B$, onde ρ_S é como definido anteriormente e ρ_B , de forma análoga, é dado por $\rho_B = \text{tr}_S\{\rho\}$.

Se S e B só interagem entre si e com nenhum outro sistema além, então podemos dizer que o sistema composto (ambiente e sistema aberto) é um sistema fechado e possui evolução unitária. A evolução unitária de sistemas quânticos é conhecida, e pode ser descrita pelo operador de evolução temporal $U(t, t_0)$ atuando no operador do sistema total $\rho(t)$. Com isso, podemos escrever o operador $\rho_S(t)$ do sistema de interesse em um instante t através da equação

$$\rho_S(t) = \text{tr}_B\{U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0)\} \quad (3.2)$$

Da mesma forma, dado que o traço é invariante por escolha de base, podemos traçar sobre os graus de liberdade do ambiente em ambos os lados da equação (2.5) - válida para o sistema composto - e encontramos uma equação de movimento para ρ_S :

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = -i\text{tr}_B\{[H(t), \rho(t)]\}, \quad (3.3)$$

onde $H(t)$ é a hamiltoniana do sistema total. As equações (3.2) e (3.3) são equações exatas, mas precisaríamos conhecer toda a dinâmica do sistema total para escrevê-las para uma situação física específica. Como em geral pode ser extremamente difícil descrever a evolução do sistema composto, é comum fazer uso de aproximações a fim de encontrar uma equação de movimento capaz de prever a evolução do sistema aberto.

3.2 Mapas dinâmicos

Na dinâmica de sistemas fechados, podemos definir um mapa $\mathcal{U}(t, t_0)$ da forma $\mathcal{U}(t, t_0)\rho(t_0) \equiv U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0)$, então $\mathcal{U}(t, t_0)$ será um mapa que leva o sistema de um instante t_0 para um instante t . A fim de encontrarmos o análogo a $\mathcal{U}(t, t_0)$ que faz a evolução de um operador densidade de sistemas abertos, começamos pensando nas características mais gerais dos mapas que transformam operadores densidade em outros operadores densidade; afinal, ρ sempre precisa representar um estado físico. Operadores densidade que correspondem a um estado físico satisfazem o seguinte:

$$\rho^\dagger = \rho, \text{tr}\rho = 1, \rho \geq 0. \quad (3.4)$$

As relações acima dizem que os operadores são hermitianos, possuem traço unitário e todos os seus autovalores são não negativos (podem ser representados por uma matriz positiva semidefinida). Então, mapas que levam operadores densidade em outros operadores densidade precisam preservar essas características.

Nesta subseção, enunciaremos algumas propriedades das representações de mapas que não demonstraremos, mas todas podem ser verificadas na referência (5), ou também demonstrações que levarão às mesmas conclusões em (3) e (6). Em primeiro lugar, todo mapa V pertencente ao espaço $\mathbf{L}^2(\mathcal{H})$ dos superoperadores de \mathcal{H} e admite uma representação na forma de Kraus, dada por $V(\rho) = \sum_i A_i \rho C_i^\dagger$. Em segundo lugar, um mapa na forma de Kraus preservará traço se e somente se

$$V(\rho) = \sum_i A_i \rho C_i^\dagger, \quad \sum_i C_i^\dagger A_i = I, \quad (3.5)$$

onde I é a identidade no espaço $\mathbf{L}^2(\mathcal{H})$. Como toda matriz positiva semidefinida é hermitiana, basta que os mapas preservem a primeira característica para que levem operadores densidade a outros operadores hermitianos como consequência. Porém, exigir que o mapa seja positivo não é suficiente para que ele sempre seja responsável por uma evolução física. Podemos pensar que o sistema está acoplado a um outro sistema D que não perturba a dinâmica do sistema composto SB. Se fizermos o traço nos graus de liberdade do banho, a evolução do sistema SD será dada por $(V \otimes I)(I \otimes \mathcal{U}_D)$ onde V é o mapa que dá a dinâmica do sistema S e \mathcal{U}_D dará a evolução do sistema D. O problema é que V ser positivo não implica em $(V \otimes I)$ positivo, então um mapa positivo poderia levar o estado do sistema composto SD a um operador densidade que não representa um estado físico (6) (5). Para que a evolução dada por V sempre represente uma evolução física, exigimos que a composição do mapa V com a identidade de um espaço de Hilbert de qualquer dimensão seja positiva. V é completamente positivo se $(V \otimes I_k)$ é positivo $\forall k \in \mathbb{N}$. Um mapa linear na representação de Kraus é completamente positivo se pode ser escrito como $V(\rho) = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger$.

Chamamos por *canais quânticos* os mapas que preservam todas as características dos operadores densidade. Um canal quântico é, portanto, um mapa linear completamente positivo e que preserva traço (um mapa CPTP, *Completely positive and trace-preserving map*). Dadas as condições acima comentadas, um mapa será um canal quântico se puder ser escrito da seguinte forma na representação de Kraus:

$$V(\rho) = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger, \quad \sum_i A_i^\dagger A_i = I \quad (3.6)$$

os operadores A_i que satisfazem essa condição são chamados de operadores de Kraus.

3.2.1 Mapa a partir da dinâmica do sistema total

Dada na seção anterior a forma geral dos mapas lineares que levam operadores densidade a outros operadores densidade, podemos considerar novamente que conhecemos a dinâmica do sistema total, observar as características dos mapas que podem ser derivados a partir dela e comparar com a forma de Kraus que descreve mapas CPTP.

Tendo a equação (3.2), consideramos que o estado inicial não possui correlações entre o sistema aberto e o ambiente (ele é da forma $\rho(t_0) = \rho_S(t_0) \otimes \rho_B(t_0)$). Como dito anteriormente, essa não é a forma mais geral de um operador no espaço $\mathbf{L}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B)$ da matriz de densidade do sistema total; qualquer estado inicial emaranhado não pode ser escrito na forma de um estado produto. Com essa consideração, podemos definir o mapa que leva $\rho_S(t_0)$ a $\rho_S(t)$ da seguinte forma:

$$V(t, t_0)\rho(t_0) \equiv \text{tr}_B\{U(t, t_0)(\rho_S(t_0) \otimes \rho_B(t_0))U^\dagger(t, t_0)\} = \rho_S(t). \quad (3.7)$$

Fixados t , t_0 e $\rho_B(t_0)$, $V(t, t_0)$ é um mapa que leva elementos do espaço dos operadores de densidade do sistema reduzido em outros elementos desse mesmo espaço $V(t, t_0) : \mathbf{L}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathbf{L}(\mathcal{H}_S)$. Consideramos a decomposição espectral de $\rho_B(t_0)$: $\rho_B(t_0) = \sum_\alpha \lambda_\alpha |\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\alpha|$. Usando a base de autovetores de $\rho_B(t_0)$ para realizar o traço da equação (3.7), podemos escrever

$$V(t, t_0)\rho_S(t_0) = \sum_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}(t, t_0)\rho_S(t_0)W_{\alpha\beta}^\dagger(t, t_0) \quad (3.8)$$

onde os operadores $W_{\alpha\beta}(t, t_0)$ são definidos como

$$W_{\alpha\beta}(t, t_0) \equiv \sqrt{\lambda_\beta} \langle\phi_\alpha| U(t, t_0) |\phi_\beta\rangle. \quad (3.9)$$

É possível mostrar que os operadores $W_{\alpha\beta}$ satisfazem

$$\sum_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}^\dagger(t, t_0)W_{\alpha\beta}(t, t_0) = I_S. \quad (3.10)$$

Portanto o mapa $V(t, t_0)$ mais geral para um estado inicial separável é linear e pode ser escrito na forma (3.8), que corresponde à forma de Kraus dada pela equação (3.6), então é completamente positivo e preserva traço. Um mapa CPTP já era esperado, afinal foi derivado sem aproximações a partir de uma dinâmica unitária para o sistema total - o que garante que o sistema total evolui para estados com significado físico, dos quais $\rho_S(t)$ é uma descrição parcial. Por fim, se permitimos que t varie entre valores maiores que t_0 , obtemos uma família de mapas dinâmicos que descreve a evolução do sistema de interesse.

3.2.2 Mapas não unitários

Já comentamos anteriormente que mapas dinâmicos de sistemas abertos não precisam ser unitários, agora pretendemos observar como essa característica ocorre. Para ilustrar, vejamos um conjunto de dois sistemas de dois níveis, consideramos o estado inicial $\rho(0) = |00\rangle\langle 00|$ que evolui através de operações unitárias para o estado $\rho(t) = 1/2(|00\rangle + |11\rangle)(\langle 00| + \langle 11|)$. Tomando o traço parcial no primeiro sistema de dois níveis,

obtemos o operador densidade reduzido para o segundo sistema, que será $\rho_1(0) = |0\rangle\langle 0|$ no primeiro instante e $\rho_1(t) = 1/2 (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$ no instante t . Em $t = 0$, $\rho_1(0)$ corresponde a um estado puro, já em t , $\rho_1(t)$ descreve um estado misto. Em evoluções unitárias, é possível provar que a pureza do sistema é preservada (6). Logo, o caso apresentado precisa corresponder a uma dinâmica não unitária - característica que surge das interações do subsistema com o restante do sistema total, ainda que a evolução deste último seja unitária. Além da não unitariedade, o exemplo anterior também reforça a necessidade de trabalhar com operadores densidade: apenas os operadores densidade podem descrever de forma satisfatória um sistema quântico que muda o grau de pureza durante a evolução.

3.2.3 Mapa dependente do estado de ρ_S

Até aqui consideramos um estado inicial separável para derivar a dinâmica do sistema aberto e encontrar que é dada por um mapa linear que pode ser escrito na forma da equação (3.6). Também mencionamos que a condição adotada não é geral. Se considerarmos um estado inicial com correlações, em geral o mapa definido por uma equação análoga à (3.7) não poderá ser escrito apenas em função do operador $U(t, t_0)$ do sistema total e do estado do ambiente ρ_B , como feito anteriormente na equação (3.9). Podemos pensar em um estado inicial escrito da forma $\rho_t(t_0) = \rho_S(t_0) \otimes \rho_B(t_0) + \rho_{corr}(t_0)$, onde $\rho_{corr}(t_0)$ contém todas as correlações entre o sistema e o ambiente. Como o operador do sistema total precisa ser positivo semidefinido, nem toda combinação de $\rho_B(t_0)$, $\rho_S(t_0)$ e $\rho_{corr}(t_0)$ é permitida (3). Sendo assim, não é mais possível escrever um operador de evolução temporal independente de $\rho_S(t_0)$; a existência de correlações restringe os estados $\rho_S(t_0)$ para os quais o mapa dará uma dinâmica física.

3.2.4 Composição

Para algumas evoluções, podemos escrever

$$V(t_2, t_0) = V(t_2, t_1)V(t_1, t_0), t_2 \geq t_1 \geq t_0 \quad (3.11)$$

sendo cada um dos mapas um canal quântico. Sabemos que os mapas $V(t_2, t_0)$ e $V(t_1, t_0)$ podem ser definidos pela equação (3.7) dada uma condição inicial de estado produto. Mas nem sempre é possível escrever um mapa $V(t_2, t_1)$ com o mesmo procedimento, já que em geral a dinâmica provocará emaranhamento entre o ambiente e o sistema. Uma igualdade como dada em (3.11) só é válida para famílias específicas de mapas dinâmicos. Para mapas inversíveis para todo $t \geq t_0$, podemos definir $V(t_2, t_1) = V(t_2, t_0)V^{-1}(t_1, t_0)$. Mesmo sendo possível construir o mapa intermediário, não temos garantia de que será um canal quântico, afinal $V^{-1}(t_1, t_0)$ não precisa nem mesmo ser positivo. Além disso, é possível mostrar que o inverso de um canal quântico só é outro canal quântico se a dinâmica for unitária (3). Um caso particular de (3.11) é quando os mapas só dependem da diferença entre os instantes

t_1 e t_2 . Nesse caso, vale a composição $V(t_1 + t_2) = V(t_2)V(t_1)$ para $t_1, t_2 \geq 0$, que garante todas as propriedades de semigrupo à família de mapas responsável pela dinâmica.

3.2.5 Gerador

Se os mapas satisfazem a equação (3.11) com cada um dos mapas podendo ser escrito na forma de Kraus, para ϵ positivo vale

$$\rho(t+\epsilon) - \rho(t) = [V(t+\epsilon, 0) - V(t, 0)]\rho(0) = [V(t+\epsilon, t) - I]V(t, 0)\rho(0) = [V(t+\epsilon, t) - I]\rho(t) \quad (3.12)$$

considerando que o limite $\epsilon \rightarrow 0$ é bem definido, (3.12) permite escrever

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\rho(t+\epsilon) - \rho(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V(t+\epsilon, t) - I}{\epsilon}\rho(t) = \mathcal{L}(t)\rho(t) \quad (3.13)$$

sendo

$$\mathcal{L}(t) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V(t+\epsilon, t) - I}{\epsilon} \quad (3.14)$$

notemos que $\frac{d\rho(t)}{dt} = \mathcal{L}(t)\rho(t)$ que aparece em (3.13) é uma generalização da equação de Liouville- von Neumann para sistemas abertos e, mais especificamente, $\mathcal{L}(t)$ é uma generalização do superoperador de Liouville definido pela equação (2.5). A definição (3.14) também permite escrever

$$\frac{\partial V(t, t_0)}{\partial t} = \mathcal{L}(t)V(t, t_0) \quad (3.15)$$

Quando família de mapas que forma um semigrupo, a solução para $V(t)$ se resume a $V(t) = \exp(\mathcal{L}t)$, onde \mathcal{L} é um superoperador independente do tempo, gerador do semigrupo.

3.2.6 Equação mestra

Sabendo que a dinâmica de $\rho_S(t)$ é descrita por uma equação diferencial dada por $\mathcal{L}(t)$, procuramos por sua forma mais geral. Consideramos o caso de um espaço de Hilbert finito $\dim \mathcal{H}_S = N$ e um estado inicial produto, reescrevemos os operadores $W_{\alpha\beta}$ em uma base conveniente e usamos as propriedades do mapa $V(t)$. Com isso, é possível encontrar uma equação com a seguinte forma:

$$\mathcal{L}(t)\rho_S(t) = -i[H(t), \rho_S(t)] + \sum_{k=1}^{N^2-1} \gamma_k(t) \left(A_k(t)\rho_S A_k^\dagger(t) - \frac{1}{2}\{A_k^\dagger(t)A_k(t), \rho_S\} \right), \quad (3.16)$$

onde $H(t)$ é auto adjunto e $\gamma_k(t) \geq 0$ para todo k e t . Essa é uma generalização com dependência temporal da forma diagonal da equação de Lindblad, que corresponde à equação mestra para o gerador de semigrupo \mathcal{L} independente do tempo. Na equação (3.16),

o comutador é responsável pela parte unitária da dinâmica enquanto o segundo termo dá a parte dissipativa. Podemos perceber que, se o segundo termo não existisse, a equação diferencial seria idêntica a uma equação de Liouville - von Neumann para sistemas fechados. Apesar disso, a hamiltoniana $H(t)$ presente na parte unitária não necessariamente é formado apenas por H_S , podemos ter contribuições unitárias para a dinâmica de ρ_S devido à interação com o ambiente. Certas aproximações permitem chegar a uma equação como a (3.16) a partir da Hamiltoniana do sistema total. Dentre esses conjuntos de aproximações temos como exemplo a aproximação de Born-Markov, onde se considera acoplamento fraco entre o sistema e o ambiente e que as excitações do ambiente decaem muito mais rápido que a escala de tempo de evolução do sistema.

3.2.7 Contratilidade

Nessa seção, apresentamos uma última característica importante para entendermos como markovianidade clássica e quântica relacionam-se. A demonstração do teorema pode ser encontrada em (7).

Teorema1 : um mapa linear que preserva traço, V , é positivo se e somente se, para todo operador hermitiano χ atuando em \mathcal{H} , $\|V(\chi)\|_1 \leq \|\chi\|_1$, onde a norma é dada por $\|\chi\|_1 = \text{tr} \sqrt{\chi^\dagger \chi}$.

4 MARKOVIANIDADE

Com as características de sistemas abertos apresentadas nas seções anteriores, temos ferramentas para o estudo da markovianidade quântica. Antes, porém, retomamos a ideia de markovianidade definida no contexto clássico.

4.1 Markovianidade clássica

Consideremos uma variável estocástica Y . Sendo $t_n < t_{n+1}$, $P_n(y_1, t_1; \dots; y_n, t_n)$ é a probabilidade conjunta de Y ter o valor y_1 no tempo t_1 , y_2 em t_2 e assim segue até y_n e t_n . E probabilidade condicional $P_{k|l}(y_1, t_1; \dots; y_k, t_k | y_{k+1}, t_{k+1}; \dots; y_{l+1}, t_{l+1})$ é a probabilidade da variável estocástica Y ter os valores $(y_{k+1}, t_{k+1}; \dots; y_l, t_l)$ dado que os valores $(y_1, t_1; \dots; y_k, t_k)$ estão fixados. Chamamos por processo Markoviano no contexto clássico um processo que obedece à igualdade

$$P_{n-1|1}(y_1, t_1; y_2, t_2; \dots; y_{n-1}, t_{n-1} | y_n, t_n) = P_{1|1}(y_{n-1}, t_{n-1} | y_n, t_n). \quad (4.1)$$

Como a probabilidade condicional só depende do passado imediato, dizemos que há perda de memória do processo em relação ao seu passado. Para uma dinâmica markoviana, o processo pode ser descrito a partir de uma hierarquia das probabilidades de transição $P_{1|1}(y_1, t_1 | y_2, t_2)$ dada abaixo (2):

$$P_3(y_1, t_1; y_2, t_2; y_3, t_3) = P_1(y_1, t_1)P_{1|1}(y_1, t_1 | y_2, t_2)P_{1|1}(y_2, t_2 | y_3, t_3). \quad (4.2)$$

O que leva a

$$P_{1|1}(y_1, t_1 | y_3, t_3) = \int P_{1|1}(y_1, t_1 | y_2, t_2)P_{1|1}(y_2, t_2 | y_3, t_3)dy_2, \quad (4.3)$$

a chamada *equação de Chapman-Kolmogorov*. Essa equação mostra que a transição de y_1 em t_1 para y_3 em t_3 pode ser quebrada em dois passos (de t_1 para t_2 e de t_2 para t_3) quando as probabilidades condicionais só dependem do instante imediatamente anterior, como descrito pela equação (4.1).

4.2 Markovianidade quântica

Como vimos, a markovianidade clássica é definida a partir da probabilidade condicional. Em um processo clássico, é possível obter as probabilidades condicionais medindo os estados do sistema em diferentes instantes. Em processos quânticos, as probabilidades dependem do processo de medição escolhido e, portanto, os estados posteriores e a probabilidade condicional também serão afetados pela medição. Por isso, a definição

de markovianidade precisa ser reformulada, preferencialmente pensando em aspectos da evolução que independem do processo de medição. Nos últimos anos, diferentes propostas de definição foram apresentadas, mas ainda não há consenso a respeito de qual deve ser adotada. Nas próximas seções, apresentaremos e compararemos as duas principais definições.

4.2.1 Critério RHP

A proposta de Ángel Rivas, Susana F. Huelga e Martin B. Plenio é definir markovianidade através da divisibilidade dos mapas dinâmicos. Famílias de mapas divivíveis são aquelas em que os mapas obedem à igualdade $V(t_2, t_0) = V(t_2, t_1)V(t_1, t_0)$, $t_2 \geq t_1 \geq t_0$, sendo cada mapa um canal quântico. Como visto nas seções 3.2.4 e 3.2.5, essa característica permitirá que a família seja descrita através de um superoperador $\mathcal{L}(t)$, que gera um semigrupo contínuo no caso em que os mapas só dependem de um parâmetro. Além disso, a definição de markovianidade através do critério RHP leva a equações diferenciais na forma da equação (3.16) com as taxas $\gamma_k(t)$ positivas para todos os instantes. É possível mostrar que o contrário também vale: toda equação linear com taxas positivas levará a uma família de mapas divisíveis (3). A semelhança da definição RHP com as características da markovianidade clássica é estabelecida quando relacionamos as probabilidades $P_1(y_n, t_n)$ com os operadores densidade $\rho(t)$ e as probabilidades de transição $P_{1|1}(y_n, t_n | y_{n+1}, t_{n+1})$ com os mapas dinâmicos. Dessa forma, a divisibilidade é um análogo quântico da equação de Chapman-Kolmogorov.

Além das propriedades matemáticas, essa definição também carrega uma ideia de perda de memória. Consideremos um sistema que é representado pelo operador ρ_1 com probabilidade q e por ρ_2 com probabilidade $(1 - q)$. Com a melhor escolha de operadores de medição, a chance mínima de erro ao atribuir um estado para o sistema (atribuir ρ_1 quando o correto seria ρ_2 , ou o contrário) é dada por

$$P_{erro} = \frac{1 - \|\Delta\|_1}{2} \quad (4.4)$$

sendo $\Delta = q\rho_1 - (1 - q)\rho_2$ a *matriz de Helstrom*. Lembremos que, pela definição RHP, cada mapa linear $V(t_2, t_1)$ que evolui um sistema com dinâmica markoviana é positivo e preserva traço. Sendo assim, os mapas markovianos por RHP satisfazem as condições do teorema apesentado na seção 3.2.7 e, portanto, nunca aumentam o valor da norma de operadores hermitianos. Escrevendo a probabilidade mínima de erro no instante t_2

$$P_{erro}(t_2) = \frac{1 - \|\Delta(t_2)\|_1}{2} \quad (4.5)$$

e lembrando que a matriz de Helstrom é hermitiana, temos o seguinte:

$$\|\Delta(t_2)\| = \|q\rho_1(t_2) - (1 - q)\rho_2(t_2)\| = \|qV(t_2, t_1)\rho_1(t_1) - (1 - q)V(t_2, t_1)\rho_2(t_1)\| \quad (4.6)$$

$$= \|V(t_2, t_1)\Delta(t_1)\| \leq \|\Delta(t_1)\|$$

onde a última passagem é garantida pelo teorema apresentado na seção 3.2.7. Como $\|\Delta(t_2)\| \leq \|\Delta(t_1)\|$, a equação (4.5) leva a $P_{erro}(t_2) \geq P_{erro}(t_1)$. Na definição RHP, cada par de instantes é conectado por um *canal quântico*, de forma que esse resultado deve valer para todo par $t_2 > t_1$. Portanto, a evolução nunca pode aumentar a distinguibilidade dos estados ρ_1 e ρ_2 em relação à medição. Podemos entender que a memória a respeito do estado inicial do sistema vai se perdendo em uma dinâmica markoviana, enquanto pode aumentar se a dinâmica for não markoviana. Isso implica que, se o objetivo é obter informação a respeito do estado inicial, então o melhor momento para medir um sistema markoviano é o mais cedo possível. Já para um sistema não markoviano, um instante posterior pode diminuir a probabilidade de erro e levar a medidas mais confiáveis.

4.2.2 Critério BLP

A segunda alternativa é proposta por Heinz-Peter Breuer, Elsi-Mari Laine e Jyrki Piilo e baseia-se na característica física da perda de memória. Com a norma apresentada na seção 3.2.7, introduzimos uma distância entre dois estados

$$D(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2} \|\rho_1 - \rho_2\| \quad (4.7)$$

que chamaremos por distância traço. Para qualquer par de estados teremos $0 \leq D(\rho_1, \rho_2) \leq 1$, sendo igual a 0 quando $\rho_1 = \rho_2$ e 1 quando os estados são ortogonais (8). Com essa medida de distinguibilidade, interpretamos um aumento em $D(\rho_1, \rho_2)$ como um ganho de informação e uma diminuição como uma perda de informação ou memória. A partir disso, essa proposta define como markovianas as dinâmicas para as quais $D(\rho_1(t), \rho_2(t))$ é monotonicamente decrescente para todo instante de tempo e qualquer par de operadores densidade em t_0 . Serão não markovianas as dinâmicas em que o valor de $D(\rho_1(t), \rho_2(t))$ aumentar em algum instante para algum par $(\rho_1(t_0), \rho_2(t_0))$.

Comparando a equação (4.7) com a matriz de Helstrom, podemos perceber que a distância traço iguala-se a $\|\Delta\|$ quando as probabilidades para os estados ρ_1 e ρ_2 são as mesmas. Portanto, toda a família de mapas que nunca aumenta o valor de $\|\Delta\|$ para quaisquer probabilidades q e p , também nunca aumenta o valor da distância traço. Mais especificamente, vimos que dinâmicas markovianas de acordo com a definição RHP possuem essa propriedade, então toda a dinâmica markoviana pela definição RHP é markoviana também pela definição BLP. Contudo, as definições não são equivalentes, já que existem dinâmicas markovianas de acordo com a definição BLP, mas não de acordo com RHP (9). Isso acontece quando $\gamma_k(t) < 0$ para algum k e algum t (portanto os mapas não são divisíveis e a dinâmica é não-markoviana de acordo com RHP), mas o efeito das taxas positivas se sobrepõe ao das negativas, fazendo com que a distinguibilidade entre os estados sempre diminua. Por fim, a relação entre a distância traço e a matriz de Helstrom permite

escrever a probabilidade mínima de erro para $q = p = 1/2$ em uma medida ideal como $P_{erro} = (1 - D(\rho_1, \rho_2))/2$. Por consequência, dinâmicas markovianas por BLP sempre aumentarão a probabilidade de erro na atribuição de um operador densidade ao sistema quando $q = p = 1/2$, já que a $D(\rho_1(t_2), \rho_2(t_2)) \leq D(\rho_1(t_1), \rho_2(t_1))$ para todo $t_2 \geq t_1$ de acordo com essa definição.

4.2.3 Caso particular e possíveis extensões

Passamos, agora, ao estudo do sistema apresentado em (1), que é capaz de exemplificar os conceitos discutidos até aqui e auxiliar na procura de descrições mais gerais de markovianidade. O sistema a ser estudado é composto por dois sistemas de dois níveis (chamaremos por 2-TSS) e um banho de osciladores cuja interação com os sistemas de dois níveis altera apenas as populações fora da diagonal dos operadores densidade. A hamiltoniana desse sistema é escrita abaixo

$$H(t) = H_S(t) + \sum_k \hbar \omega_k b_k^\dagger b_k + \frac{S_z}{2} \sum_k \hbar (g_k^* b_k + g_k b_k^\dagger) \quad (4.8)$$

sendo que $H_S(t) = \sum_{i=1}^2 \hbar \epsilon_i \sigma_{zi}/2 + \hbar J(t) \sigma_{z1} \sigma_{z2}/2$ é a hamiltoniana referente apenas aos sistemas de dois níveis, o primeiro somatório em (4.8) é a hamiltoniana do banho de osciladores e o segundo somatório é a hamiltoniana de interação, onde $S_z = \sigma_{z1} + \sigma_{z2}$. Nesse sistema, o banho é caracterizado pela densidade espectral $\mathcal{J}(\omega) \equiv \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k)$.

Temos agora duas possibilidades: podemos escolher o 2-TSS como o sistema aberto e o banho de osciladores como o ambiente, ou elegemos apenas um sistema de dois níveis (TSS) como o sistema de interesse e o conjunto TSS auxiliar e banho como ambiente. Se considerarmos que o estado inicial do sistema é um estado produto $\rho_{SB}(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B(0)$, a primeira alternativa (2-TSS como sistema aberto) deve levar a mapas dinâmicos lineares desde que saibamos escrever o operador de evolução temporal do sistema total e fazer o traço nos graus de liberdade do ambiente. Já a segunda alternativa (um único TSS como sistema aberto) é interessante porque permite estudar dinâmicas não lineares. Como vimos na seção 3.2.3, os mapas dinâmicos mais gerais para um estado inicial emaranhado são não lineares, então basta que $\rho_S(0)$ descreva um estado emaranhado para que a linearidade não seja mais garantida. Nesse caso, o emaranhamento no instante inicial se dá apenas entre dois sistemas de dois níveis, tornando-se um caso significativamente menos complicado dentre as dinâmicas não lineares de sistemas abertos. As duas situações são discutidas em (1) para casos em que as duas definições classificam da mesma forma as dinâmicas. Estudaremos, então, um caso com emaranhamento entre os dois sistemas de dois níveis, para o qual temos mapas dinâmicos não lineares.

Para um banho em equilíbrio à temperatura T , temos $\rho_B(0) = \exp(-\sum_k \hbar \omega_k b_k^\dagger b_k / k_B T)/Z$. Com a equação (4.8), é possível encontrar $U(t, t_0)$ para o sistema total. Seguindo a ideia apresentada em (3.2) e (3.3), obtemos as equações para o operador densidade $\rho_{S1}(t)$ de um

único TSS fazendo o traço nos graus de liberdade do banho e do TSS auxiliar. Conseguimos reproduzir o resultado:

$$\frac{d}{dt}\rho_{S1}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_{S1}(t), \rho_{S1}(t)] + \frac{\gamma_1(t)}{2} \left(\sigma_{1z}\rho_{S1}(t)\sigma_{1z} - \frac{1}{2}\{\sigma_{1z}^2, \rho_{S1}(t)\} \right). \quad (4.9)$$

Na equação acima utilizamos as definições:

$$\begin{aligned} \beta(t) &\equiv e^{i \int_0^t d\tau J(\tau)} \langle +-| \rho_S(0) |--\rangle + e^{-i \int_0^t d\tau J(\tau)} \langle ++| \rho_S(0) |+-\rangle \\ H_{S1}(t) &\equiv \hbar(\epsilon_1(t) + J_1(t))\sigma_{1z}/2 & J_1(t) &\equiv \text{Im} \left(\frac{\beta}{|\beta|^2} \frac{d\beta^*}{dt} \right) \\ \gamma_1(t) &\equiv \gamma(t) - \text{Re} \left(\frac{\beta}{|\beta|^2} \frac{d\beta^*}{dt} \right) & \gamma(t) &\equiv \int d\omega (\mathcal{J}(\omega)/\omega) \sin(\omega t) \coth \left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right) \end{aligned}$$

A equação (4.9) pode ser identificada com a forma (3.16), onde $H_{S1}(t)$ é responsável pela parte unitária da evolução e $\gamma_1(t)$ e os operadores σ_{1z} formam a parte dissipativa. Podemos observar que os operadores responsáveis pela evolução têm dependência em $\beta(t)$, que é função de $\rho_S(0)$ e, portanto, do estado inicial do próprio sistema em que atua ($\rho_{S1}(t)$). Essa dependência já havia sido prevista em 3.2.3 e é responsável pela não linearidade da dinâmica.

Se supomos que $\rho_S(0)$ é estado produto, esperamos uma dinâmica linear. De fato, quando substituímos $\rho_S(0)$ por $\rho_{S1}(0) \otimes \rho_{S2}(0)$ nas equações, a dependência de $J_1(t)$ e $\gamma_1(t)$ em $\beta(t)$ é tal que as dependências em $\rho_{S1}(0)$ se cancelam. Os mapas dinâmicos correspondentes a essa situação são capazes de evoluir qualquer estado inicial $\rho_{S1}(0)$, fixado $\rho_{S2}(0)$ e os demais parâmetros do sistema. A distância traço para dois operadores densidade evoluídos de acordo com (4.9) é dada por

$$D(\rho_{S1}^a(t), \rho_{S1}^b(t)) = \sqrt{(\alpha_a - \alpha_b)^2 + e^{-2\Gamma(t)} |\beta_a(t) - \beta_b(t)|^2}, \quad (4.10)$$

onde $\Gamma(t) \equiv \int_0^t dt' \gamma(t')$ e $\alpha \equiv \langle ++| \rho_S(0) |++\rangle + \langle +-| \rho_S(0) |+-\rangle$. Para $\rho_S(0) = \rho_{S1}(0) \otimes \rho_{S2}(0)$ e fixando $\rho_{S2}(0)$, o sinal da derivada de (4.10) sempre se iguala ao sinal de $-\gamma_1(t)$. Então nas dinâmicas em que $\gamma_1(t)$ é sempre positivo, a distância traço é monotonicamente decrescente. Esses são os critérios para classificar uma dinâmica como markoviana de acordo com as definições RHP e BLP, respectivamente. Da mesma forma, se $\gamma_1(t)$ é negativo para algum instante, nesse mesmo instante a distância traço estará aumentando seu valor; essas características indicam refluxo de informação para o sistema e não-markovianidade de acordo com as duas definições. Desta maneira, vemos que as definições RHP e BLP sempre concordam para um estado inicial separável. Essa concordância já era esperada porque estamos estudando um caso com uma única taxa de decaimento $\gamma_1(t)$.

A análise fica mais complicada para os mapas dependentes de $\rho_{S1}(0)$. Em relação às definições já apresentadas, RHP exige que o mapa seja linear para que a dinâmica seja markoviana e BLP considera que podemos comparar quaisquer dois estados $\rho_{S1}(0)$

fixando $\rho_{S2}(0)$ - o que não é verdade se quisermos analisar os casos não lineares. Mas é do nosso interesse entender como podemos analisar efeitos de memória e semelhanças com a markovianidade clássica também para a grande classe de evoluções em que o estado inicial é emaranhado. Por isso, pensamos em alternativas de extensões dessas definições que possam ser utilizadas nesses casos mais gerais.

Incialmente vamos pensar em uma extensão da definição BLP. Originalmente poderíamos observar a distância traço entre dois operadores densidade diferentes desde que fixássemos os demais parâmetros do sistema, então ambos os estados seriam evoluídos pelos mesmos mapas dinâmicos. No caso não linear os próprios mapas dependem de $\rho_{S1}(0)$, então fixar os demais parâmetros do sistema e modificar $\rho_{S1}(0)$ em geral modifica também os mapas dinâmicos. Surge o questionamento: quais estados iniciais podemos comparar entre si na equação (4.10) para classificar uma dinâmica não linear como markoviana? Precisamos definir um critério claro: se restringirmos a uma classe muito pequena, podemos classificar como markoviano algo que não é, justamente por não permitirmos a comparação entre os estados para os quais a distância traço é não monotônica; se aceitarmos uma classe muito grande de estados, podemos classificar como não markoviano algo que é, por vermos a distância traço crescer em uma medida entre dois estados iniciais que se diferenciam por motivos diferentes de refluxo de informação para o sistema. Porém, muito dificilmente saberemos dizer se estamos restringindo demais, porque precisaríamos testar todos os casos que satisfazem a restrição para poder afirmar que há uma inconsistência como a apontada anteriormente (em que a distância traço classifica como markoviano algo que não é). Por isso, o melhor caminho é começar pelos casos mais abrangentes e, conforme vão se mostrando inconsistentes, restringimos a uma classe mais específica o grupo de estados que podemos comparar entre si.

Seguindo essa ideia, estudamos o caso em que podemos modificar $\rho_S(0)$ por completo, mas ainda mantemos todos as demais características referentes ao estado do banho e à forma da interação fixas. Comparamos os operadores densidade iniciais $\sigma_1 = |1\rangle\langle 1|$ e $\sigma_3 = |3\rangle\langle 3|$, onde $|1\rangle = (\sqrt{0.4}|++\rangle + \sqrt{0.1}|+-\rangle + \sqrt{0.3}|-+\rangle + \sqrt{0.2}|--\rangle)$ e $|3\rangle = (\sqrt{0.45}|++\rangle + \sqrt{0.2}|+-\rangle + \sqrt{0.3}i|-+\rangle + \sqrt{0.05}i|--\rangle)$. A distância traço e sua derivada em função do tempo, assim como os $\gamma_1(t)$ correspondentes a cada caso podem ser observados no figura 1.

Devemos salientar que $\gamma_1(t) \geq 0, \forall t$, mesmo com dependência em $\rho_{S1}(0)$, ainda é capaz de carregar ideia de perda de memória. Na equação (4.9), o termo entre parênteses que multiplica $\gamma_1(t)$ é dado apenas pelas coerências de $\rho_{S1}(t)$ multiplicadas por um fator negativo. Isso significa que, para todo $\gamma_1(t) > 0$, a derivada dos termos fora de diagonal de $\rho_{S1}(t)$ é sempre no sentido que diminui a sua amplitude. Essa dinâmica perde informação a respeito das coerências existentes em $\rho_{S1}(0)$ e leva estados iniciais diferentes, mas com as mesmas distribuições na diagonal a estados cada vez mais parecidos. Então podemos tomar

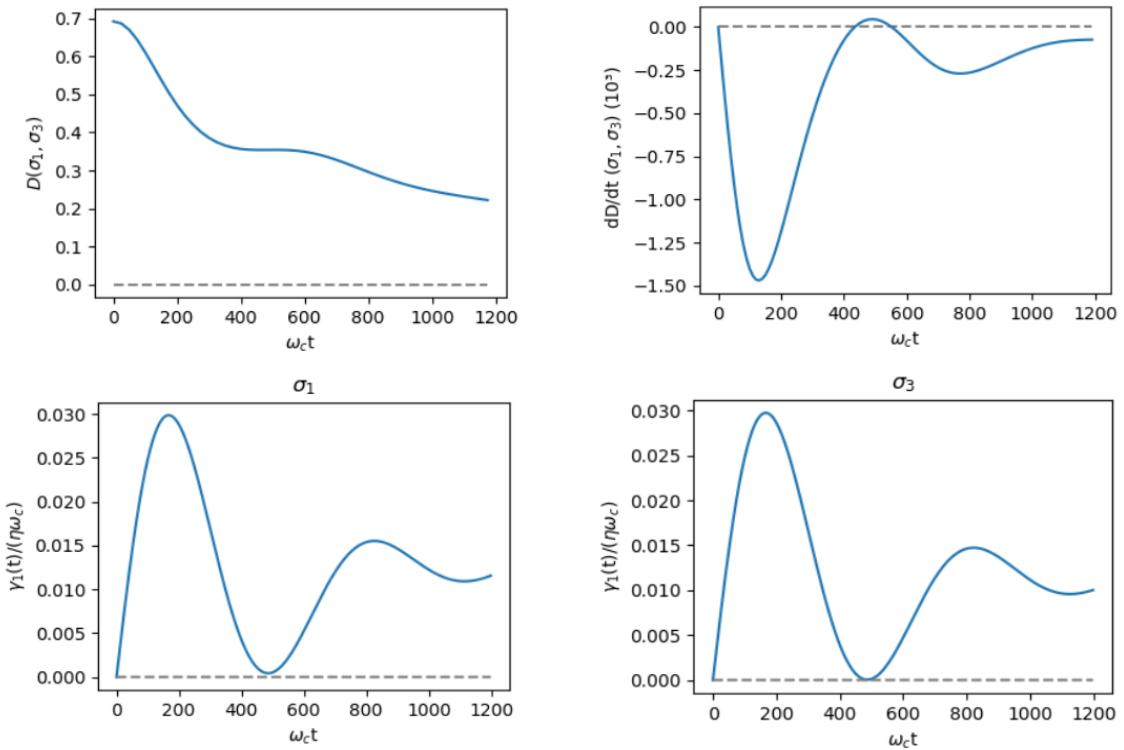


Figura 1 – Distância traço, derivada da distância traço e taxas de decaimento $\gamma_1(t)$ correspondentes aos estados iniciais σ_1 e σ_3 . Demais parâmetros utilizados: $T = \frac{5\hbar\omega_c 10^{-3}}{2k_B}$, $\mathcal{J}(\omega) = \eta \frac{\Omega^4 \omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (l\omega/2)^2}$, $\Omega = l = 0.01\omega_c$, $\eta = 0.1$. Nos gráficos de $\gamma_1(t)/(\eta\omega_c)$ o valor na região do mínimo é da ordem de 10^{-4} para σ_1 e 10^{-5} para σ_3 , enquanto o erro da integração numérica é da ordem de 10^{-8} em torno do mínimo para os dois casos, garantindo taxas de decaimento positivas nessas regiões.

Fonte: Elaborada pela autora.

$\gamma_1(t)$ como parâmetro para analisar a validade de outras propostas. Se usarmos a distância traço como critério de markovianidade não linear e permitimos modificar $\rho_S(0)$ livremente, os gráficos apresentados mostram que essa medida classifica como não markovianas duas dinâmicas que possuem taxas de decaimento positivas, indicando inconsistência nessa possibilidade de extensão.

Alternativas mais restritivas para a extensão de BLP a serem estudadas são fixar o operador densidade do TSS auxiliar $\rho_{S2}(0)$ - o que continuará modificando os mapas a cada $\rho_{S1}(0)$ diferente - ou fixar os mapas dinâmicos e permitir mudanças em $\rho_{S2}(0)$. Em geral essa segunda alternativa resultará em distância traço constante (se considerarmos $\beta_a(t) = \beta_b(t)$ em (4.10)) com excessão dos casos em que $\beta_a(t)/\beta_a(0) = \beta_b(t)/\beta_b(0)$, o que pode ser verificado através da forma dos mapas apresentada em (1).

Para a extensão não linear da definição RHP, $\gamma_1(t) \geq 0$ apresenta-se como um bom critério, pois representa perda de memória. Esse critério é vantajoso em relação à distância traço por não exigir comparações com outros estados iniciais, o que, como vimos, pode ser bastante complicado no caso não linear. Além disso, pode ser verificado que os

mapas apresentados em (1) obedecem uma relação de composição do tipo $V(t_2, t_0, \rho_S(t_0)) = V(t_2, t_1, \rho_S(t_1))V(t_1, t_0, \rho_S(t_0))$. O que indica que podemos ter uma generalização da relação de divisibilidade para mapas dependentes de $\rho_S(t)$.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, encontramos as equações para a dinâmica dos operadores densidade de sistemas abertos e comentamos a respeito de características de mapas dinâmicos como não unitariedade e não linearidade. Também apresentamos a composição de mapas e como ela se relaciona com um gerador, que possui taxas de decaimento positivas para famílias de mapas divisíveis. Em seguida, passamos ao estudo da markovianidade. Dado que a definição de markovianidade clássica não pode ser estendida diretamente para o caso quântico, analisamos as duas principais definições de markovianidade quântica, que ainda hoje disputam o consenso. Vimos que o critério RHP parte das propriedades matemáticas da markovianidade clássica para definir markovianidade quântica através da divisibilidade da família de mapas dinâmicos. Com isso, a definição RHP é capaz de carregar também a ideia de perda de memória. O critério BLP baseia-se completamente nesta última característica da markovianidade clássica para definir a markovianidade quântica através de uma medida de distância entre dois estados. Temos, então, um critério que classifica como markoviana qualquer dinâmica com ideia de perda de memória (BLP) e outro que deixa de lado algumas dinâmicas com essa característica, mas é construído de forma que todas as dinâmicas markovianas terão propriedades matemáticas semelhantes às da markovianidade clássica. Como nenhuma das definições é completamente equivalente à definição clássica, precisamos escolher entre abranger todas as dinâmicas com ideia de perda de memória ou manter as propriedades matemáticas. O estudo do caso não linear mostra que as extensões de BLP podem apresentar falhas e que é extremamente difícil encontrar os critérios que garantam uma definição consistente. Enquanto o critério de taxas de decaimento positivas (extensão da definição RHP) mantém a ideia de perda de memória irreversível mesmo para a dinâmica não linear. Além disso, a possibilidade de haver uma extensão válida de divisibilidade para mapas não lineares permite esperar que a conexão com a markovianidade clássica que motiva a definição RHP ainda esteja presente nessas dinâmicas mais gerais.

REFERÊNCIAS

- 1 BRITO, F.; WERLANG, T. A knob for markovianity. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 17, n. 7, p. 072001, 2015.
- 2 REICHL, L. E. **A modern course in statistical physics**. 2nd ed. New York: Wiley, c1998.
- 3 RIVAS, A.; HUELGA, S. F. **Open quantum systems**. Berlin: Springer, 2012. v. 10.
- 4 BREUER, H.-P. Foundations and measures of quantum non-markovianity. **Journal of Physics B: atomic, molecular and optical physics**, IOP Publishing, v. 45, n. 15, p. 154001, 2012.
- 5 COSTA-FILHO, J. I. **Quantum non-Markovianity induced by classical noise**. 2017. 184 p. Dissertation (Master in Science) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.
- 6 MANZANO, D. A short introduction to the lindblad master equation. **AIP Advances**, AIP Publishing LLC, v. 10, n. 2, p. 025106, 2020.
- 7 RIVAS, Á.; HUELGA, S. F.; PLENIO, M. B. Quantum non-markovianity: characterization, quantification and detection. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 77, n. 9, p. 094001, 2014.
- 8 BREUER, H.-P. *et al.* Colloquium: non-Markovian dynamics in open quantum systems. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 88, n. 2, p. 021002, 2016.
- 9 HAIKKA, P.; CRESSER, J. D.; MANISCALCO, S. Comparing different non-markovianity measures in a driven qubit system. **Physical Review A**, APS, v. 83, n. 1, p. 012112, 2011.